数理解析研究所講究録
805巻 1992年 178-184

Eisenstein series of low weight

近畿大理工　長岡昇勇 (Shoyu Nagaoka)

W. Kohnen は "Class numbers, Jacobi forms and Siegel-Eisenstein series of weight 2 on $Sp_2(\mathbb{Z})$" において Siegel-Eisenstein series $\lim_{s\to 0} E_2^{(2)}(Z,s)$ の Fourier 展開を, Jacobi modular群の Eisenstein級数を調べることにより与えた. 講演では, この論文の結果の別証明を, Shimura の一般化された超幾何関数に対する理論と G. Kaufhold の古典的公式により比較的容易に得られることを示した

$\mathbb{H}_n$ を n 次の Siegel 上半空間, $Sp_n(\mathbb{R})$ を n 次実 symplectic 群とする. $Sp_n(\mathbb{R})$ は良く知られている様に $\mathbb{H}_n$ 上に一般化された一次分数変換により作用する. $\Gamma_n = Sp_n(\mathbb{Z})$ を n 次の Siegel modular群とし, その部分群 $\Gamma_{n,\infty}$ を $\Gamma_{n,\infty} = \{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n \mid C = 0_n \}$ で定義する. 我々は次のタイプの Eisenstein級数を考える.

$$E_k^{(n)}(Z,s) = \det(Y)^s \sum_{\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_{n,\infty} \backslash \Gamma_n} \det(CZ+D)^{-k} |\det(CZ+D)|^{-2s}$$

ここで $k \in \mathbb{Z}$, $(Z,s) \in \mathbb{H}_n \times \mathbb{C}$. この級数は $Re(s) > \frac{n-k+1}{2}$ の条件のもとで絶対収束し，そこで正則関数となる.

G. Shimura は論文 "On Eisenstein series" の中で このタイプの Eisenstein 級数 ($SU(n,n)$ の場合もこめて)に対して，次の問題を考えた.

(A) $E_k^{(n)}(Z,s)$ は s の関数として $s=0$ で holomorphic か？

(B) もしそうなら $E_k^{(n)}(Z,0)$ は Z について holomorphic か？

(C) これもそうなら $E_k^{(n)}(Z,0)$ は，cyclotomic な Fourier 係数をもつか？

上記論文においてこれらの問題に対する答えと，興味深い結果が述べられているが我々が以下に考える $n=2$ の場合には，$k \geqq 2$ であれば (A) の答えが affirmative であることが証明されている. Kohnen はこの結果をふまえ，前記論文において，$E_2^{(2)}(Z,0)$ の Fourier 展開の式を与えた. 彼は Jacobi 形式の理論を使ったが，ここでは Shimura's hypergeometric functions の理論を使っても導かれることを示そう. そのためいくつかの定義を与える.

$Sym_n(\mathbb{R})$ を n 次実対称行列のなす $\mathbb{R}$ vector 空間，$Pos_n(\mathbb{R})$ を n 次正定値実対称行列のなすその部分集合とする.

$Y \in Pos_n(\mathbb{R})$, $T \in Sym_n(\mathbb{R})$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ に対して

$$\xi^{(n)}(Y, T; \alpha, \beta) = \int_{Sym_n(\mathbb{R})} e(-tr(TV)) \det(V+iY)^{-\alpha} \det(V-iY)^{-\beta} dV,$$

$$\eta^{(n)}(Y, T; \alpha, \beta) = \int_{V \pm T > 0} e(-tr(YV)) \det(V+T)^{\alpha-\kappa} \det(V-T)^{\beta-\kappa} dV$$

とおく. ここで dV は $Sym_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 上の Euclidean measure, $\kappa = \kappa(n) = \frac{n+1}{2}$. 上の積分は $Re(\alpha+\beta) > 2\kappa - 1$ で絶対収束し, 下の積分は $Re(\alpha+\beta) > \kappa - 1$, $Re(\beta) > 2\kappa - 1$ で絶対収束し次の等式が成立する:

$$\xi^{(n)}(Y, T; \alpha, \beta) = i^{n\beta - n\alpha} 2^{n(1-\kappa)} (2\pi)^{n\kappa} \Gamma_n(\alpha)^{-1} \Gamma_n(\beta)^{-1} \eta^{(n)}(2Y, \pi T; \alpha, \beta)$$

$\xi^{(n)}$ の解析接続や解析的性質は, Shimura "Confluent hypergeometric functions on tube domains" で論じられている.

次に Siegel 級数について説明する. Λ_n で n 次半整対称行列のなす集合を表わすものとする. $(s, T) \in \mathbb{C} \times \Lambda_n$ に対して,

$$\alpha^{(n)}(s, T) = \sum_{\substack{R \in Sym_n(\mathbb{Q}) \\ R \bmod Sym_n(\mathbb{Z})}} \nu(R)^{-s} e(tr(TR))$$

なる特異級数を考える. ここで $\nu(R)$ は, $R = C^{-1}D$, $\begin{pmatrix} * & * \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n$ と表示したとき $\nu(R) = |\det C|$ と定義されたものとする. 知られている様にこの級数は $Re(s) > n+1$ で収束し, 次の

表示をもつ:

$$\alpha^{(n)}(s,T)=\prod_{p:\mathrm{prime}}\alpha_p^{(n)}(s,T),\qquad \alpha_p^{(n)}(s,T)=\sum_{R_p}\nu(R_p)^{-s}\,\mathbb{e}(\mathrm{tr}(TR_p)),$$

ここで $\nu(R_p)$ は p の巾. 級数 $\alpha_p^{(n)}$ を Shimura "On Eisenstein series" にある様に Siegel 級数と呼ぶことにする.

<u>定理 1</u>. $E_k^{(n)}(Z,s)$ は, 次の形の Fourier 展開をもつ.

$$E_k^{(n)}(Z,s)=\det(Y)^s\Big\{1+\sum_{j=1}^{n}\sum_{T\in\Lambda_j}\sum_{Q\in\widehat{\mathcal{U}}_{n\times j}}\xi^{(j)}(Y[Q],T;k+s,s)$$

$$\cdot\alpha^{(j)}(k+2s,T)\,\mathbb{e}(\mathrm{tr}(X[Q]T))\Big\}.$$

ここで $\mathcal{U}_{n\times j}=\{Q\in M_{n\times j}(\mathbb{Z})\mid (Q\ *)\in GL_n(\mathbb{Z})\}$ で, $\widehat{\mathcal{U}}_{n\times j}$ は次の同値関係による代表系: $Q_1\sim Q_2 \Leftrightarrow \exists\, U\in GL_j(\mathbb{Z})$ s.t. $Q_2=Q_1U$. さらに $Y[Q]={}^tQYQ$, $Z=X+iY\in\mathbb{H}_n$.

我々はこの定理を $E_2^{(2)}(Z,s)$ にあてはめる. すると次の様な表示をもつことがわかる.

$$E_2^{(2)}(Z,s)=A_0(Y,s)+A_{1,1}(Z,s)+A_{2,1}(Z,s)+A_{2,2}(Z,s)$$

$$A_0(Y,s)=\det(Y)^s+\det(Y)^s\sum_{Q\in\widehat{\mathcal{U}}_{2\times1}}\xi^{(1)}(Y[Q],0;s+2,s)\,\alpha^{(1)}(2s+2,0)$$

$$+\det(Y)^s\,\xi^{(2)}(Y,0_2;s+2,s)\,\alpha^{(2)}(2s+2,0_2),$$

$$A_{1,1}(Z,s)=\det(Y)^s\sum_{0\neq t\in\mathbb{Z}}\sum_{Q\in\widehat{\mathcal{U}}_{2\times1}}\xi^{(1)}(Y[Q],t;s+2,s)\,\alpha^{(1)}(2s+2,t)$$

$$\cdot\mathbb{e}(X[Q]t).$$

$$A_{2,j}(Z,s) = \det(Y)^s \sum_{T \in \Lambda_2^{(j)}} \xi^{(2)}(Y,T;s+2,s)\,\alpha^{(2)}(2s+2,T)\,e(\mathrm{tr}(XT))$$

ここで $j=1,2$ で $\Lambda_2^{(j)}$ は Λ_2 の元で rank が j なるものを集めてきたもの.

命題 1.

$$\lim_{s\to 0} A_0(Y,s) = 1 - \frac{18}{\pi^2\sqrt{\det(Y)}}\left(\frac{\gamma}{2} + 1 + \frac{1}{2}\log\frac{v'}{4\pi} - \log|\eta(W_Y)|^2\right).$$

命題の記号の説明: まず γ は Euler 定数, v' は $Y = \begin{pmatrix} v & y \\ y & v' \end{pmatrix} \in Pos_2(\mathbb{R})$ で, W_Y は, この Y について

$$W_Y = \frac{y + i\sqrt{\det(Y)}}{v'} \in H_1$$

で定義したもの. $\eta(s)$ は Dedekind eta 関数.

証明は, $\xi^{(j)}$, $\alpha^{(j)}$ の $T=0_j$ での公式と, Y に対する Epstein zeta 関数についての Kronecker limit formula を使う.

命題 2.

$$\lim_{s\to 0} A_{1,1}(Z,s) = 288 \sum_{0\le T \in \Lambda_2^{(1)}} \left(\sum_{d \mid \mathrm{cont}(T)} d\, H\!\left(\frac{|\mathrm{disc}(T)|}{d^2}\right)\right) e(\mathrm{tr}(TZ)).$$

記号の説明: $\mathrm{cont}(T)$ は $T = \begin{pmatrix} m & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2} & n \end{pmatrix}$ $(m,n,r \in \mathbb{Z})$ と表わしたとき $\mathrm{cont}(T) = \mathrm{g.c.d}(m,r,n)$. また $\mathrm{disc}(T)$ は $\mathrm{disc}(T) = r^2 - 4mn$ なる整数 (ここでは $T \in \Lambda_2^{(1)}$ より $\mathrm{disc}(T)=0$) $H(\Delta)$ は判別式 $-\Delta$ の二元二次形式に対する Kronecker-

Hurwitz class number を表わす（詳しくは Eichler-Zagier の "The theory of Jacobi forms" か Cohen の論文を参照）.

ここでは $H(0)=-\frac{1}{12}$.

命題 3.

$$\lim_{s\to 0} A_{2,1}(Z,s) = -\frac{72}{\pi^3}\sum_{T\in\Lambda_2^{(1)}} \frac{1}{2}\eta^{(2)}(2Y,\pi T;2,0)\,\sigma_0(\mathrm{cont}(T))\,e(\mathrm{tr}(TX))$$

記号の説明：$\eta^{(2)}(\cdots)$ は前に定義した関数（を解析接続したもの），$\sigma_0(\ )$ は $\sigma_s(x)=\sum_{0<d|x} d^s$ で定義される divisor 関数.

命題 4.

$$\lim_{s\to 0} A_{2,2}(Z,s) = 288\sum_{0<T\in\Lambda_2}\Big(\sum_{d|\mathrm{cont}(T)} d\,H\Big(\frac{|\mathrm{disc}(T)|}{d^2}\Big)\Big)\,e(\mathrm{tr}(TZ))$$

$$-\frac{72}{\pi^3}\sum_{0\neq \mathrm{disc}(T)=\square}\eta^{(2)}(2Y,\pi T;2,0)\,\sigma_0(\mathrm{cont}(T))\,e(\mathrm{tr}(TX))$$

この命題の証明は，Kaufhold の古典的論文 "Dirichletsche Reihe mit Funktionalgleichung in der Theorie der Modulformen 2. Grades" で与えられている $\alpha^{(2)}(s,T)$ の具体的公式と，超幾何関数 $\xi^{(2)}$ の解析的性質（Shimura により調べられている）を組合せることに得られる.

以上の命題を合わせて次の主定理を得る.

定理 2. $E_2^{(2)}(Z,s)$ は $s=0$ で finite で $E_2^{(2)}(Z,0)$ は次の Fourier 展開をもつ：

$$E_2^{(2)}(Z,0) = 1 - \frac{18}{\pi^2\sqrt{\det(Y)}}\left(\frac{\gamma}{2} + 1 + \frac{1}{2}\log\frac{v'}{4\pi} - \log|\eta(w_Y)|^2\right)$$

$$- \frac{72}{\pi^3} \sum_{\substack{0 \neq T \in \Lambda_2 \\ \mathrm{disc}(T) = \mathrm{square}}} \varepsilon_T\, \eta^{(2)}(2Y, \pi T; 2, 0)\, \sigma_0(\mathrm{cont}(T))\, e(\mathrm{tr}(TX))$$

$$+ 288 \sum_{\substack{0 \neq T \in \Lambda_2 \\ T \geqq 0}} \left(\sum_{d \mid \mathrm{cont}(T)} d H\left(\frac{|\mathrm{disc}(T)|}{d^2}\right)\right) e(\mathrm{tr}(TZ)).$$

ここで $\varepsilon_T = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } \mathrm{rank}\, T = 1 \\ 1 & \text{if } \mathrm{rank}\, T = 2 \end{cases}$.

注意：Kohnen の original の論文では $\eta^{(2)}(\cdots)$ の部分が別の関数 $\beta(x,y)$ で表わされているが，相方が一致することについては現在 $\mathrm{rank}\, T = 1$ の部分について証明されている．もちろん任意の T について証明されるべきである．)